CAPÍTULO

5

Funções Trigonométricas de Um Ângulo Comum

Objetivos deste Capítulo

1. Expressar ângulos como rotações e partes de uma rotação

2. Definir funções trigonométricas de um ângulo geral e relaciona-las para o ângulo de referência

3. Solucionar completamente o triângulo de ângulo reto dados quaisquer dois valores.

4. Classificar as relações de co-função

5. Pesquisar as relações de repetição

Comandos Maple Usados Neste Capítulo

evalf(expr)	Avalia *expr* como número decimal
irem(25,4)	Divide 25 por 4 e condiciona o resto, i.e., 1.
isolate(eqn, var)	Reorganiza *eqn*, trazendo *var* por si mesmo para o *lhs*.
simplify(expr)	Simplifica uma expressão, a qual contenha funções trigonométricas.
trunc(number)	Truncar um número para o inteiro mais próximo em direção a 0.
with(student)	Carrega o pacote estudante para tornar o comando *isolate* disponível.

Funções Trigonométricas de um Ângulo Comum

As três funções trigonométricas básicas, sin, cos, e tan, foram definidas no Capítulo 3 e as funções inversas, sec, csc, e cot, foram definidas no Capítulo 4. Os sinais algébricos das funções trig básicas em qualquer quadrante foram definidos no Capítulo 3 também. Você pode ver em uma definição de uma função trigonométrica inversa que cada uma tem o mesmo sinal como na função relatada. Isto é, cot(x) irá ter o mesmo sinal que tan(x), sec(x), irá ter o mesmo sinal que cos(x), e csc(x) irá ter o mesmo sinal que sin(x). Nós agora iremos estender estas definições e resultados para os ângulos maiores que 2π radianos, ou 360°.

Rotações

O termo lado inicial e lado terminal foram introduzidos na Figura 3.1. Eles formam os dois lados de um ângulo. Aqui estão mais algumas definições para tornar a discussão dos ângulos comuns mais fáceis. O *vértice* de um ângulo é o ponto onde os dois lados se encontram. Ele é o ponto (0, 0) na Figura 3.1. Agora pensando sobre os dois ângulos, θ_1 e θ_2. O primeiro ângulo, θ_1, é construído colocando o lado inicial ao longo do eixo de x com o vértice na origem. O lado terminal torna o ângulo de 60°. O diagrama é mostrado na Figura 5.1, parte (a).

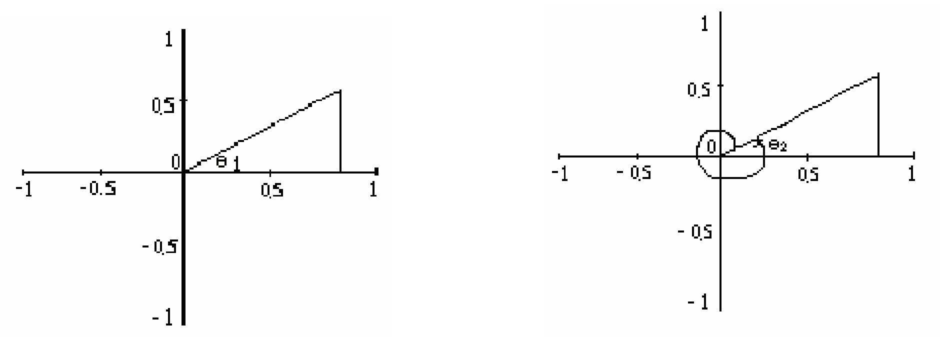

Figura 5.1 Um ângulo de 60° e um ângulo de 420°

Nós chamamos ângulos de 60° e 420° ($\pi/6$ radianos e $2\pi + \pi/6$ radianos) ângulos coterminais. Se você girar o lado terminal através de quaisquer números de revoluções completas antes de parar, você irá criar um ângulo coterminal com um que tenha sido girado para menos do que uma rotação completa. Invertendo o processo, você pode sempre expressar qualquer ângulo, como θ_2, não importa o tamanho, como um ângulo θ_1 menor do que 360°. Esses ângulos são os mesmos no que diz respeito aos valores das funções trigonométricas. Observe as implicações cuidadosamente. A *posição* de uma roda que tenha girado mais do que uma rotação pode ser a mesma posição de uma que tenha girado menos de uma rotação completa, mas o passo usado será um pouco diferente.

Considere uma roda de um carro, que tenha sido colocada em um teste de instalação em um laboratório de pesquisa e desenvolvimento. A roda é montada sobre um cinto giratório para que possamos medir o passo usado. O eixo é agregado a um dispositivo de medida do ângulo, o qual conta as revoluções. Depois de um prolongado teste, a roda pode ter rodado através de um ângulo de 3.0×10^9 graus. Se uma marca tiver sido colocada no meio da roda quando o experimento foi iniciado, onde ela estaria agora? Nós podemos dividir o ângulo por um número de rotações completas usando o Maple. Para ver quantas rotações foram feitas, divida por 360°.

>Número_de_rotações:=trunc(evalf(3e9/360));

Número_de_rotações := 8333333

O número de graus na rotação parcial permanente deve ser:

>360*(3.0e9/360-Número_de_rotações);

120.

Outra maneira de chegar ao mesmo resultado é usar o resto. Nós dividimos 3×10^9 por 360 e solicitamos ao Maple o resto.

>irem(3000000000, 360);

120.

Nós concluímos que a marca na roda está no ângulo de 120° para o eixo *y*, isto é, um ângulo de 30° para o eixo de *x*. Depois desse cálculo, nós sabemos que 120° é algo equivalente `a 3 bilhões de graus! Mas de que maneira, exatamente? Certamente não em termos de passos usados ! Uma nova roda que tenha girado através de um ângulo de 120° ainda continua nova, enquanto uma roda que tenha sido testada por 3 bilhões de graus tenha viajado o equivalente a:

>evalf (1*ft*(3e9Pi/180)/(6280*(ft/mi)), 3);

8320. mi

Nesse cálculo, nós temos usado a fórmula $s = r\theta$, convertendo o ângulo para radianos, e convertendo passos para milhas. Nós temos usado também as indeterminadas *ft* e *mi* para mostrar as unidades explicitamente. A roda rodou mais de 8,000 mi. Embora esta posição seja a mesma se ela tivesse rodado apenas 120°, muito mais teria acontecido. Contudo, sin(120)=sin(3,000,000,000). A função trigonométrica para os dois ângulos é a mesma.

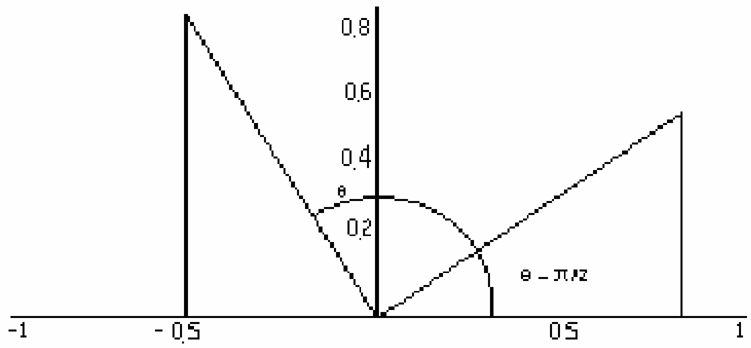

Figura 5.2 Os Ângulos θ e θ - π/2 *Não* São Equivalentes

O ângulo de 120° é chamado de *ângulo de referência.*[1] Quanto às funções trigonométricas, seus valores são os mesmos se elas são avaliadas em 3,000,000,000° ou 120°. O ângulo de referência é definido como o ângulo menor do que 360° coterminal de um dado ângulo. Para encontrar o ângulo de referência, você subtrai os múltiplos de 360° do ângulo dado até o resto de 360° ser obtido.

1. Observe que a definição do *ângulo de referência* dada aqui difere do padrão um encontrado em muitos livros. A razão para a mudança de definição que ocorre neste livro é que ela a torna mais útil quando o Maple é usado ou para o uso da sua calculadora científica. A definição dada aqui preserva o sinal das funções trigonométricas. A definição comum é que o ângulo de referência é o ângulo agudo θ´ formado pelo lado terminal de θ e eixo de *x*. Você pode calcular sempre esse ângulo dada a nossa definição de ângulo de referência e usando o diagrama na Figura 5 - 2 (a). Lembre-se sempre de desenhar na linha vertical o lado terminal para o eixo de *x*, mesmo se o lado terminal ficar por baixo deste eixo.

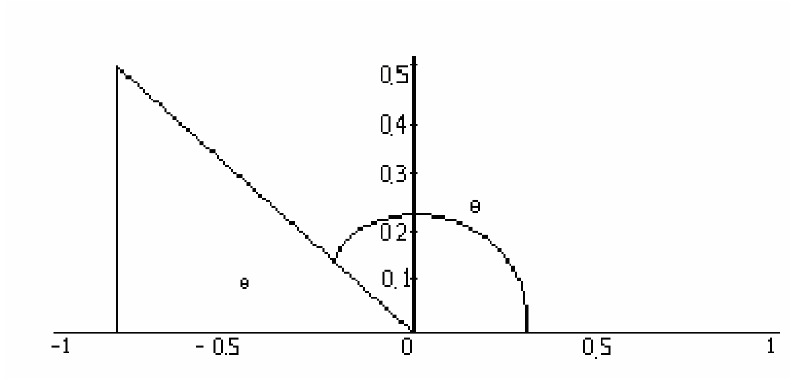

Figura 5.2 (a) Definições de *Ângulo de Referência* Encontrada em Muitos Livros.

Esse processo pode ser novo? Por que não subtrair múltiplos de 90° até um ângulo menor que um ângulo reto ser alcançado? As funções trigonométricas desses ângulos poderiam ser as mesmas das originais? Infelizmente elas não poderiam. Como a Figura 5.2 mostra, os ângulos θ = 120° e θ - π /2 não são equivalentes. O diagrama mostra ângulos θ = 120° e - π/2 = 30°. Eles são relatados, como veremos no Capítulo 8, mas não são os mesmos.

As funções trigonométricas de um ângulo comum são definidas em termos de um ângulo de referência equivalente. Essa definição tem uma conseqüência importante: toda função trigonométrica pode ter seus ângulos aumentados (ou diminuídos) pelos múltiplos de 360° (ou 2π radianos) sem mudar seus valores. Se *n* é um inteiro, então a seguinte relação é seguida. Para cada 5 – 1, 5 – 2 e 5 – 3, a primeira equação mede θ em radianos e a segunda equação mede θ em graus.

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi n), \text{ ou } \sin(\theta) = \sin(\theta + 360n) \qquad (5-1)$$

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi n), \text{ ou } \cos(\theta) = \cos(\theta + 360n) \qquad (5-2)$$

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + 2\pi n), \text{ ou } \tan(\theta) = \tan(\theta + 360n) \qquad (5-3)$$

Exemplo 5 – 1

Reduza um ângulo de 1,234° ao seu ângulo de referência.

Solução. Divida o ângulo por 360° para expressá-lo em termos de rotações, e então converta a rotação de fração para graus:

.evalf(1234/360);

3.427777778

360*0.427777778

154.0000001

A aproximação decimal para o ângulo é 154 graus. Como vimos, a resposta exata pode ser encontrada usando *irem*. Aqui, nós encontramos o resto quando 1.234 é dividido por 360°.

> irem(1234,360);

154

Ambos os métodos chegam a 154 graus.

Sua Vez. Reduza 12,345° ao seu ângulo de referência.

Resposta: ____

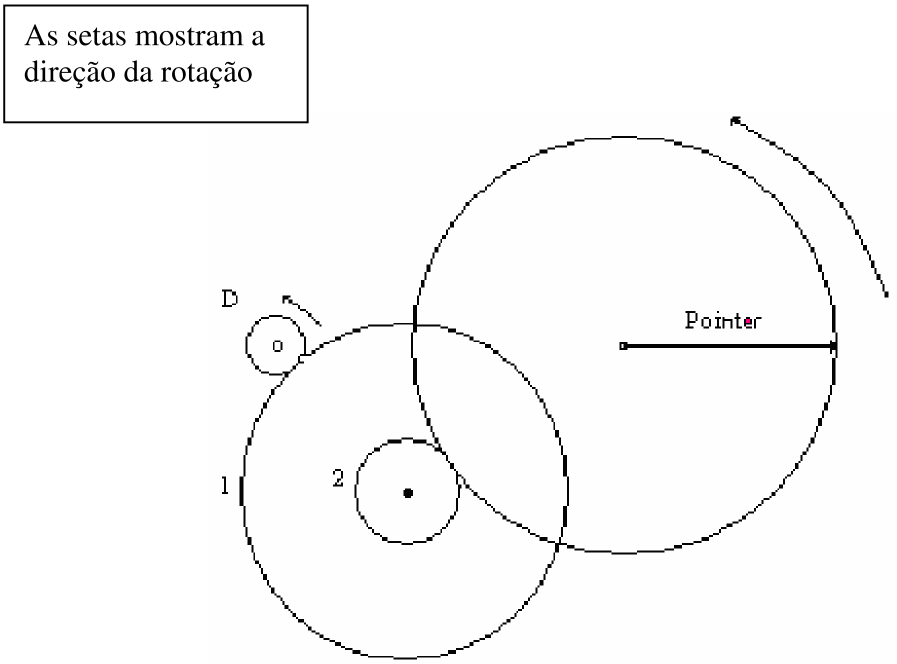

Figura 5.3 O Mecanismo de um Trem

Exemplo 5 – 2

Ângulos amplos são freqüentemente uma parte dos cálculos da posição de uma engrenagem em uma montagem. Um vantagem mecânica ampla pode ser atingida se o condutor da engrenagem (*D*) é muito menor que a engrenagem conduzida. Nesse problema, a engrenagem conduzida tem um ponto em anexo. As proporções da engrenagem são as seguintes: condutor da engrenagem – 21 dentes, engrenagem 1 – 155 dentes, engrenagem 2 – 45 dentes, engrenagem conduzida – 244 dentes. Através de que ângulo o ponto se move se o condutor da engrenagem fizer 10 rotações ? As engrenagens 1 e 2 são firmemente anexadas juntas na mesma flecha ? (veja figura 5.3).

Solução. Você construiu a solução no Maple alternativamente contando as revoluções e os dentes da engrenagem. Se D faz 10 revoluções, então 10 X 21 dos dentes são envolvidos. Desde então, na engrenagem 1, um total de 210 desses dentes estão incluídos. Portanto, ele roda pela fração 210/155. A engrenagem 2 roda com a engrenagem 1; então ela faz o mesmo número de revoluções da engrenagem 1 (210/155); e multiplique pelo número de dentes por revolução (nomeado, 45). Esse é o número de dentes da engrenagem que deve ser envolvido no ponto de engrenagem. O ângulo deve ser a proporção do número de revoluções para os dentes da engrenagem em uma revolução completa, 360 vezes para converter para graus. Aqui está um cálculo completo (a seqüência de números alternadamente conta as revoluções, dentes da engrenagem, revoluções, dentes da engrenagem, revoluções, converta para o ângulo):

> 10*21/155*45/244*360;

$$\frac{170100}{1891}$$

Observe que esse número está muito perto de 90º. Se o denominador da fração fosse 1,890 ao invés de 1,891, nós poderíamos ter:

> 170100/1890;

$$90$$

Portanto, o ângulo de rotação é quase 90º. Converta 10*21/155*45/244*360 para decimais.

Resposta: O ângulo preciso através do qual o ponto gira é_________graus.

Sua vez: Se o condutor da engrenagem é modificado para um com 122 dentes e a engrenagem conduzida faz 20 revoluções, através de que ângulo o ponto irá girar?

*Resposta:*____

Solução de Triângulos de Ângulo Reto

Deixe-nos revisar o desenvolvimento que nós tínhamos até então.

1. Nós tínhamos definido um ângulo usando os termos *vértice*, *lado inicial e lado terminal*. O lado inicial permanece ao longo do eixo de *x*.

2. Esse ângulo pode incluir qualquer número de rotações completas. O ângulo restante é chamado *ângulo de referência*.

3. Uma linha perpendicular é desenhada do final do lado terminal para o eixo de *x*. Essa construção forma um triângulo de ângulo reto.

4. As funções trigonométricas para esse ângulo são definidas desse triângulo reto (chamado *triângulo de referência).*

A figura 5.4 mostra o triângulo de referência para um ângulo de 1,290º. Esse ângulo é equivalente para três rotações completas mais um adicional 210º (1290º = 3 × 360º + 210º). O ângulo θ" no diagrama é o que outros livros chamam de ângulo de referência porque está perto do triângulo de referência. Examine o triângulo reto na Figura 5.4. Nós nomeamos o lado vertical *y*, o horizontal *x*, e a hipotenusa *r*. Portanto, nós podemos aplicar as definições de seno, coseno, tangente e assim for diante, para esse triângulo encontrar as funções trigonométricas para o ângulo geral θ. Em nosso exemplo aqui, θ = 1,200º. Lembre-se de que você deve levar em conta os sinais algébricos de *x* e *y* quando formar a proporção trigonométrica. No exemplo aqui, ambos *x* e *y* são negativos. A hipotenusa, *r*, é sempre positivo. O Maple tem ajuda suficiente para fornecer escalas nos eixos de *x* e *y*, para que nós possamos estimar os valores para a proporção dos lados.

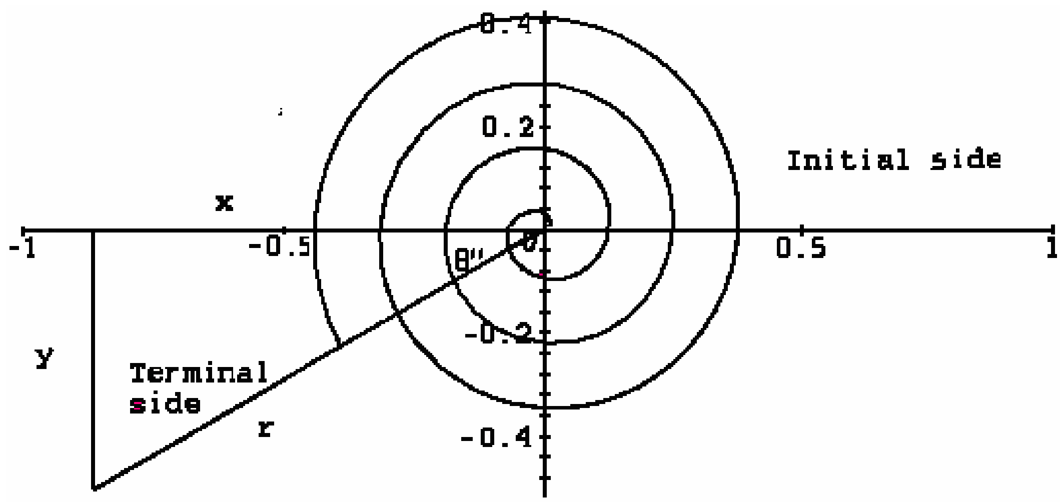

Figura 5.4 O Triângulo de Referência para um Ângulo Arbitrário

A hipotenusa, *r,* que é também o lado terminal tem comprimento único. O valor de *x* é mais ou menos –0.87, e o valor de *y* é mais ou menos –0.5 (cada marca de *y* conta como 0.04). Nós podemos escrever as estimativas para sen(θ) e cos(θ) examinando: sen(θ) = *y/r* = -0.5/1 = -0.5, e cos(θ) = *x/y* = -0.87/1 = -0.87. O valor para tan(θ) é facilmente calculado: tan(θ) = *y/x* =-0.5/-0.87 = 0.57. Essas estimativas estão próximas aos valores atuais. Prove isso usando a sua calculadora e o Maple:

sen(1,290º) = ____

cos(1,290º) = ____

tan(1,290º) = ____

O Triângulo de Referência

Você tem visto como construir um triângulo de referência para qualquer ângulo dado. Existe outra maneira de construir o triângulo de referência, que é tão óbvia que é oferecida assim: *O triângulo de referência pode ser construído dado o valor de qualquer função trigonométrica tão logo você saiba em qual quadrante o ângulo está.* Digamos que você saiba que sen(θ) = 3/5 e θ está no Quadrante 1. Desde que sen(θ) = *y/r*, você identificará 3 com *y* e 5 com *r*, então a relação de Pitágoras, $x^2 + y^2 = r^2$, para resolver para *x*. Desde que 16 + 9 = 25, *x* deve ser igual a 4. Todos os três lados do triângulo são conhecidos agora, então o triângulo pode ser construído. Isso determina o ângulo θ. Você pode usar um transferidor para medi-lo. Entenda também que qualquer triângulo similar pode ser usado. Geralmente, nós escolhemos a hipotenusa para ser 1, isto é, nós inserimos *r* = 1. Essa construção é demonstrada na Figura 5.5. Todos os comprimentos são escalados dividindo cada lado por 5. Não importa qual triângulo similar é usado, você pode determinar cada proporção trigonométrica do diagrama. *Isso porque vale a pena lembrar o método.*

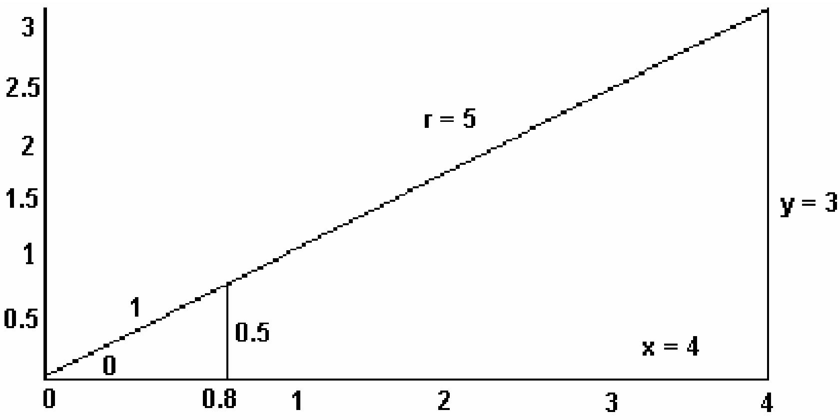

Figura 5.5 A Construção do Triângulo de Referência, dado sen(θ) = $\frac{3}{5}$

Você não precisa ter o valor da função trigonométrica expressada como uma proporção. Exemplo: Construa o triângulo de referência para sen(θ) = 0.64. A solução mais simples é escolher a hipotenusa do triângulo de referência como sendo 1. Das definições da função seno, a altitude do triângulo reto será $y = 0.64$. A base, x, é encontrada usando o teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{1 - 0.64^2} = \sqrt{0.5904} = 0.768 \qquad (5 - 4)$$

O valor do cos(θ) é 0.768, e tan(θ), a qual é y/x, é 0.64/0.768 = 0.83. As outras três funções trigonométricas são encontradas tirando o inverso desses resultados.

Observe que você pode escalar os números para trabalhar no gráfico. Por exemplo, se você multiplicar cada valor por 10, $y = 6.4$, $x= 7.68$, e $r = 10$. Esses valores são fáceis de plotar, devido a os triângulos similares serem usados, o ângulo será o mesmo.

Você está agora, pronto para resolver virtualmente qualquer problema envolvendo o triângulo reto. A solução dos triângulos retos está detalhada no Capítulo 3 e alguns poucos exemplos serão dados no próximo.

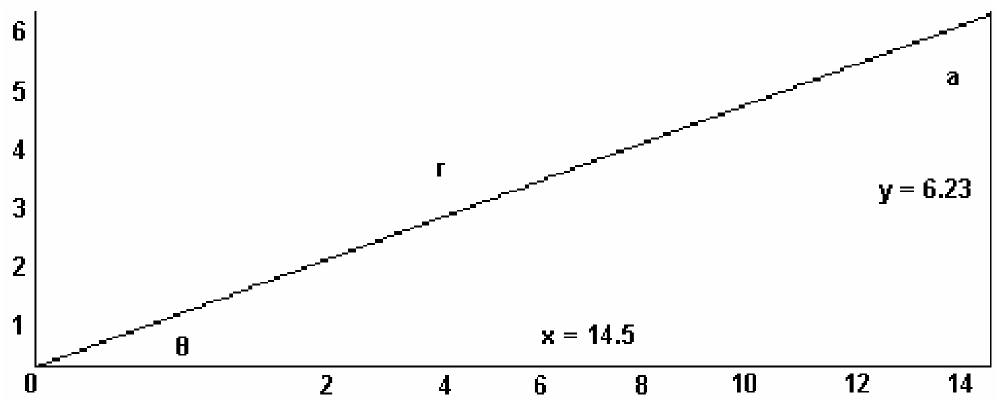

Figura 5.6 Gráfico do Exemplo 5 - 3

Exemplo 5 - 3

A solução para *r*, θ e α no triângulo reto dado na Figura 5.6. se aproxima das respostas para três figuras significantes.

Solução: A solução completa para um problema de triângulo reto significa encontrar todas as partes sem solução; nesse caso, *r*, θ, e α. Use a relação de Pitágoras para encontrar *r*.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{14.5^2 + 6.23^2} = \sqrt{249} = 15.8 \qquad (5-4a)$$

$$\tan(\theta) = \frac{6.23}{14.5} = 0.430, \tan(\alpha) = \frac{14.5}{6.23} = 2.33$$

$$sen(\theta) = \frac{6.23}{15.8} = 0.394, sen(\alpha = \frac{14.5}{15.8} = 0.918$$

$$\cos(\theta) = \frac{14.5}{15.8} = 0.918, \cos(\alpha) = \frac{6.23}{15.8} = 0.394$$

Os ângulos θ e α podem ser encontrados medindo o diagrama com um transferidor ($\theta = 23.2^\circ$ e $\alpha = 66.8^\circ$). Os ângulos podem ser determinados usando as funções trigonométricas inversas, as quais serão descritas detalhadamente no Capítulo 9. Lembre-se de um tema que vai além desse livro: se você não pode resolver um problema por uma fórmula, você pode resolvê-lo aplicando os conceitos que você sabe. Coloque o transferidor no diagrama, e você irá medir o ângulo θ como 23º. Você pode tentar estimar o ângulo se você não tiver um transferidor à mão. Digamos que você estimou um ângulo de 30º. Agora você pode encontrar o resultado correto para as três figuras significantes, pelo método das tentativas. Calcule sen(θ) para $\theta = 30^\circ$, e então revise a sua estimativa do ângulo baseada no resultado.

Nós iremos usar Maple para cálculos de tentativas. Lembre-se, θ é em graus, enquanto Maple usa radianos! Nós convertemos para radianos e usamos *evalf* para converter a resposta para decimal:

>evalf(sin(30*Pi/180));

.5000000000

Você vê que o resultado é muito grande. Agora vem a parte fácil: coloque o cursor do Maple de volta para a linha de entrada e mude o número para algum número menor (você pode querer tentar 15). Desde que você possa pressionar Return de qualquer lugar da linha de entrada, faça isso depois revise sua estimativa. Dessa vez, o resultado será mais ou menos 0.26 que é muito baixo, como nós estamos procurando por sen(θ) = 0.394. Você irá chegar rapidamente a uma estimativa de $\theta = 23^\circ$, cujo seno é 0.39. Muito mais tentativas devem ser necessárias para atingir com precisão as três figuras. Seu resultado irá ser $\theta = 23.2^\circ$, fazendo ¥α = 66.8¨¬. O ponto que¨®s queremos chegar ¨¦ de que *fácil* aplicar o conhecimento que você já tem para resolver esse problema sem saber usar a função trigonométrica inversa. Leve a aproximação diretamente ao uso das definições da função seno: coloque-a na linha de entrada do Maple. Desde que você não conheça o ângulo, *adivinhe!* Quando você executa o comando, você irá ver se você está certo. Desde que se tornou fácil você editar o comando, você pode realizar novas tentativas rapidamente. Essa é uma boa preparativa para o entendimento das funções inversas, para que quando você as encontra no Capítulo 9, você esteja pronto.

Sua Vez

(a) Resolva o triângulo reto se x = 72 e y = 35. Resposta:________________

(b) Resolva o triângulo reto se r = 127 e θ = 155º. Resposta:________________

(c) Resolva o triângulo reto se r = 0.154 e θ = 295º. Resposta:________________

(d) Resolva o triângulo reto se x = -42.5 e y = -62.7º. Resposta:________________

Exemplo 5 - 4

Um hidrógrafo faz duas visões de uma montanha usando seu trânsito. Sua estação está acima do nível do mar, mas a montanha começa no mar e aumenta para o interior. Ele registra suas observações na Figura 5.7. Ambos os ângulos de medida foram feitos no que diz respeito à linha horizontal, dois ângulos retos são formados.

A linha de base para esse problema é 1.5 mi, ou 7,920 ft. Então, o lado a é

a = evalf(7920*tan(Pi/180*(6+16/60)))*ft; (Observe como 16' é convertido para graus.)

a = 869.71261 f t

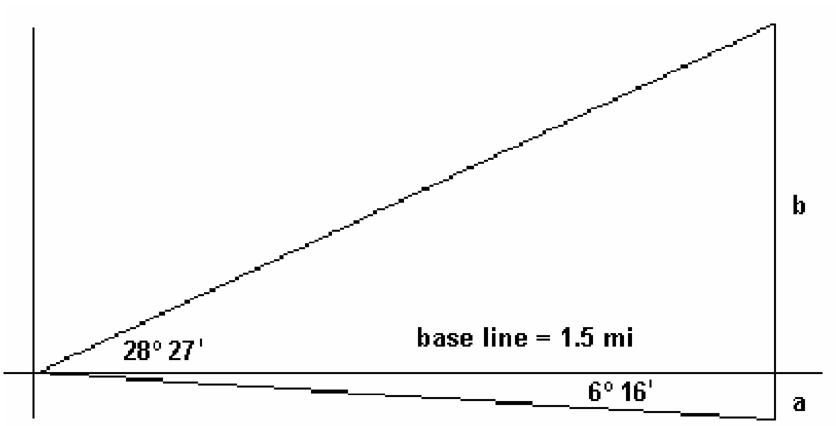

Figura 5.7 Um Problema de um Hidrógrafo

> b = evalf(7920*tan(Pi/180*(28+27/60)))*ft;

b = 4291.264356 ft

> a + b = (869.7 + 4291)*ft;

a + b = 5161 ft

Dê uma olhada nos comandos do Maple que foram usados para resolver o problema e observe esses pontos:

1. Maple usa medidas em radianos; então ângulos em graus são multiplicados por $\pi/180$.

2. Os ângulos do hidrógrafo são medidos em graus e minutos. Minutos são convertidos para uma fração de graus dividindo por 60.

3. O comando *evalf* é usado para converter as respostas para decimal.

4. Os comandos do Maple (como demostrados nesse problema) contêm um sinal igual e *não* são atribuições. Então, os valores de *a* e *b* nos primeiros dois comandos não são lembradas pelo Maple.

5. Expressões foram multiplicadas pelo nome não avaliado *ft* para que as respostas possam conter a unidade física tanto quanto os valores numéricos. Esse é simplesmente um problema de estilo.

O ponto principal que você deve ter em mente é o modo pelo qual você pode construir uma solução usando uma área de trabalho do Maple. O próximo exemplo mostra mais sobre essa aproximação.

Sua Vez

(a) Quais são as distâncias *a* e *b* se o ângulo acima da horizontal é 33º50' e o ângulo abaixo da horizontal é 10º17' ?

Resposta: ____

(b) Se a = 560 ft e b = 4,250 ft, quais são os ângulos em graus e minutos?

Resposta: ____

Exemplo 5 - 5

Um triângulo tem lados de 6.14 m, 7.28 m e 12.4 m, respectivamente. Encontre cos(θ), onde o ângulo θ é mostrado na Figura 5.8.

Solução: O problema, como originalmente se afirma, não se refere a um triângulo reto. Construir a linha perpendicular AB forma dois triângulos retos, ABC e ABO. Essa construção é a chave para encontrar uma solução para esse problema. Algumas vezes você tem um problema "complicado" para resolver ! Desenhar linhas de construção é uma técnica poderosa em um problema de solução geométrica (veja a Figura 5.8).

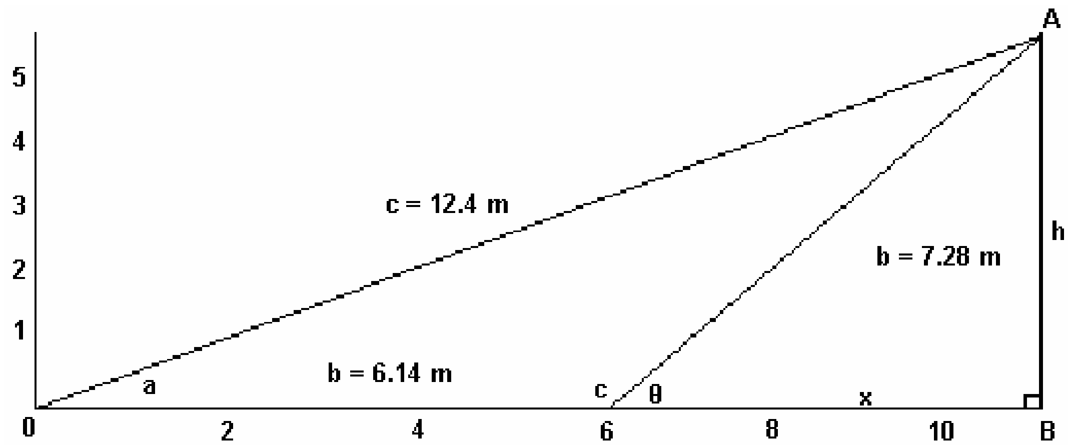

Figura 5.8. Construindo um Triângulo como um Método de Solução

Aplicando o teorema de Pitágoras para o ângulo ABO, nós temos:

> eq1 :=c^2 = h^2 + (a + b*cos(theta))^2;

$$eq1 := c^2 = h^2 + (a + b \cos(\theta))^2$$

Nós temos usado a relação $x = b \cos(\theta)$, desde que a base do triângulo ABO seja $a + x$. Depois, nós *expandimos* o termo contendo cos(θ) e nós *substituímos* por *h* ao mesmo tempo.

eq2 :=expand(subs(h=b*sin(theta),eq1));

$$eq2 := c^2 = b^2 \sin(\theta)^2 + a^2 + 2b \cos(\theta)\, a + b^2 \cos(\theta)^2$$

Essa expressão pode ser simplificada:

> eq3 :=simplify(eq2);

$$eq3 := c^2 = a^2 + b^2 + 2b \cos(\theta)\, a$$

Finalmente, nós resolvemos cos(θ) e substituímos os valores dados de *a, b* e *c*:

>with(student): eq4 := isolate(eq3, cos(theta));

$$eq^4 := \cos(\theta) = -\frac{1}{2}\,\frac{-c^2 + a^2 + b^2}{ba}$$

>subs(a= 6.14, b= 7.28, c= 12.4, eq4);

$$\cos(\theta) = .705404123$$

Nós podemos usar o método de tentativas, descrito no Exemplo 5 - 2, para encontrar θ = 45.14º.

Dê uma olhada nos comandos do Maple que foram usados para resolver o problema e observe esses pontos:

1. Embora o problema afirmado não contenha um ângulo reto, uma linha de construção foi usada para criar dois triângulos retos.

2. Nós escrevemos uma equação, baseada no teorema de Pitágoras, a qual co0ntém cos(θ). Infelizmente, ela contém sen^2 (θ) e cos^2 (θ) também. Desde que nós tenhamos usado o comando *simplify* antes, nós tentamos ver o que poderia acontecer. O sen^2 (θ) e cos^2 (θ) desapareceram! Nós veremos isso no Capítulo 6.

3. Nós usamos o pacote estudante do Maple para usar o comando *isolate*. Nós poderíamos ter usado *solve* também. Em muitos casos, *solve* e *isolate* fazem o mesmo trabalho.

4. Nós encontramos o valor de cos(θ) por substituição. Organizando o trabalho desta maneira, nós registramos todos os passos encontrando a solução para os nossos problemas. Nós poderíamos salvar os resultados no disco para que a qualquer momento em que nós quiséssemos resolver um problema dados os três lados de um triângulo, nós teríamos um modelo para usar. Você provavelmente observou que nós temos usado para *derivar* uma famosa fórmula da *lei do coseno* como um "efeito" de resolução desse problema. Em outras palavras, nós encontramos uma fórmula que pode ser usada a qualquer momento em que nos forem dados três lados de um triângulo. A fórmula permite calcular o ângulo exterior na base. Conhecendo esse ângulo, o ângulo interior é encontrado subtraindo o exterior de 180º. Observe que o ângulo α pode ter sido encontrado por tentativas também. As fórmulas serão derivadas novamente no Capítulo 9.

Sua Vez

(a) Encontre cos(θ) se $a = 70$, $b = 80$, $c = 130$. *Resposta:*__________________

(b) Encontre sen(θ) se $a = 0.527$, $b = 0.650$, $c = 1.03$. *Resposta:*__________________

Funções Periódicas

As Figuras 5.1 e 5.4 mostram que as funções trigonométricas têm os mesmos valores quando o lado terminal do ângulo é qualquer número dado de uma rotação adicional completa. Desde que o lado terminal permaneça acima dele mesmo, depois de qualquer número de rotações completas adicionais, a proporção trigonométrica calculada dele deve ser a mesma. Cada rotação é chamada um *ciclo*. A proporção trigonométrica se repete em cada ciclo. Quando uma função se comporta dessa maneira, ela é chamada *função periódica*. Essa relação da função trigonométrica consigo mesma pode ser expressada pelas seguintes fórmulas (em radianos):

$$\text{sen}(\theta + 2\pi n) = \text{sen}(\theta),\ n = 0,1,2,3... \qquad (5 - 5)$$

$$\cos(\theta + 2\pi n) = \cos(\theta),\ n = 0,1,2,3... \qquad (5 - 6)$$

$$\cos(\theta + 2\pi n) = \cos(\theta),\ n = 0,1,2,3... \qquad (5 - 7)$$

Essa última relação requer alguns esclarecimentos. Você sabe que se você girar o lado terminal do ângulo através de uma rotação adicional completa, ele irá permanecer acima do topo da sua posição original. A tangente irá ter o mesmo valor antes e depois da rotação completa. Isso poderia acontecer antes de uma rotação completa? No caso da função tangente poderia. Examine a Figura 3.6 cuidadosamente. Ela mostra que a função tangente se repete cada vez que o lado terminal é aumentado por π radianos, ou 180°. Desde que ambos x e y sejam negativos no quadrante 3, a função tangente será a mesma que era no quadrante 1. Em outras palavras, $\tan(\theta + \pi n) = \tan(\theta)$, para que a função tangente se repita duas vezes tão freqüentemente quanto as funções seno e coseno. Então você tem uma grande relação

$$\tan(\theta + \pi n) = \tan(\theta),\ n = 0,1,2,3... \qquad (5\text{-}8)$$

È claro que essa relação é perfeitamente consistente com Eq. 5 - 7. Eq. 5 - 8 é uma grande relação.

Maple automaticamente aplica essa simplificação se o número de rotações é dado explicitamente em uma expressão. Observe os seguintes resultados de avaliação de algumas expressões trigonométricas. Entenda que, α, β, e γ são todas menores que uma rotação completa.

> sin(2*Pi + alpha), cos(24*Pi + beta), tan(3*Pi + gamma);

$$\sin(\alpha), \cos(\beta),\ \tan(\gamma)$$

Em cada caso, Maple sabe reduzir o ângulo para o ângulo de referência. Ele desfaz as rotações extras, ou, no caso da função tangente, a meia rotação extra. Observe, no entanto, o que acontece se nós pedimos ao Maple avaliar a função seno quando nós damos ao ângulo de referência uma meia rotação extra:

> sin(3*Pi + alpha);

$$- \sin(\alpha)$$

O resultado é o negativo do seno de alpha! Você consegue ver porquê? Se você adicionar uma meia rotação extra, o lado terminal será o oposto do que era. Isso irá provocar uma mudança de sinal. (O mesmo acontece com a função tangente, mas, desde que ambos, x e y, mudem de sinal, o resultado irá permanecer o mesmo. Com as funções seno e coseno, r é sempre positivo; então só existe uma mudança de sinal, resultando na negação do valor original.)

Definição de Amplitude, Período, Freqüência e Fase

A periodicidade das funções seno e coseno são úteis, especialmente por causa das suas relações para os movimentos circulares (Figura 3.2). Muitas oscilações de sistemas físicos podem ser modeladas por uma função seno ou coseno cujo ângulo varia linearmente com o tempo. Tais funções são algumas vezes chamadas *senóides*. O movimento de uma criança em um balanço, o pêndulo de um relógio (do relógio do avô), a vibração de um tambor e uma molécula diatômica podem ser todos descritos por senóides. Na eletricidade, as senóides são centrais para a teoria do circuito de corrente alternada.

Essas senóides são geralmente funções de tempo cujo ângulo varia com o tempo na seguinte discussão. O tipo de movimento que nós queremos discutir tem a propriedade de que as excursões repetem sempre: isto é, o movimento é periódico. Moléculas Diatômicas podem vibrar bilhões de vezes em frações de segundo, ou mais rápido ainda. A extensão do seu movimento será muito pequena, no entanto. Uma criança em um balanço irá para trás e a cada 40 segundos a extensão do movimento será um pequeno passo. Um sinal elétrico pode oscilar muito devagar (como a comunicação de um submarino no fundo do mar) ou incrivelmente rápido (como um forno de microondas ou satélite de comunicação). Em todos esses casos, a expressão geral é:

$$f(\mathrm{t}) = A \operatorname{sen}(2\pi f t + \alpha) \qquad (5 - 9)$$

A quantidade A é chamada a *amplitude*, f é a freqüência, e α é a *fase*. A variável t mede o tempo em alguma unidade conveniente. Se nós trocarmos $2\pi f$ pela variável única ω, a fórmula se torna:

$f(\mathrm{T}) = f(0) = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}(\omega T + \alpha) = A\ \mathrm{sen}(\alpha)$ (5 - 11)

O único caminho para conseguir que uma função execute uma oscilação completa é aumentar o ângulo para 2π. Então, nós temos a equação:

$$\omega T = 2\pi \qquad (5 - 14)$$

$$T = \frac{2\pi}{\varpi} \qquad (5-15)$$

O tempo, T, é chamado *período* de oscilação. Esse é o tempo que leva para completar uma oscilação completa. O recíproco desse tempo é chamado *freqüência*. A quantidade α é chamada *fase*. Você pode organizar as coisas para que você comece seu plano de sincronização quando a senóide atravessar 0 em direção à oscilação. É geralmente fácil de medir o ângulo da senóide quando $t = 0$ e chamar esse ângulo de *mudança de fase*.

Uma figura realmente útil aqui (veja Figura 5.9). Nós queremos comparar as duas senóides:

$f_1(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t)$, e $f_2(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$ (5 - 16)

para alguns valores específicos de A, ω, e α. Em $f_1(t)$, digamos $A = 10$, $\omega = 1$, e $\alpha = 0$. Em $f_2(t)$, digamos $A = 10$, $\omega = 1$, e $\alpha = 0.03$ radianos. O gráfico de $f_1(t)$, com limite t de 0 a 6.28s, é:

> f1 := 10*sin(t); f2 := 10*sin(t + 0.3);

f1 := 10 sin (t)

f2 := 10 sin (t + .03)

> plot({ f1, f2 }, t = 0 .. 6.28);

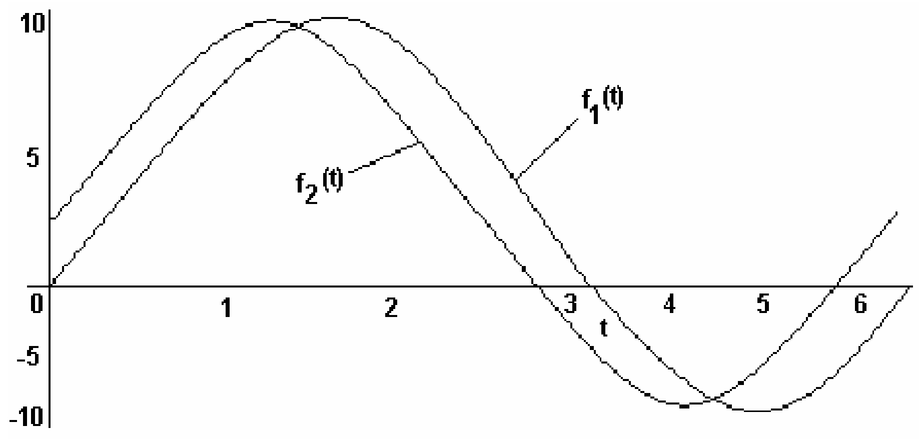

Figura 5.9 Duas Senóides: Curva $f_2(t)$ é a Mudança de Fase Comparada com a Curva $f_1(t)$

Dê uma olhada nos comandos Maple usados nesse exemplo e observe os pontos:

1. A freqüência angular, ω, é 1 radiano por segundo. Conseqüentemente, uma onda completa terá 2π segundos. Isso porque nós usamos 6.28 s num intervalo de tempo de ($2\pi \approx 6.28$).

2. A curva de mudança de fase, $f_2(t)$, atravessa o eixo *y antes* do gráfico de $f_1(t)$. Um ângulo de fase positiva muda o gráfico para a *esquerda*. Não existe outra mudança para a curva. A amplitude e a frequência permanecem a mesma. É como se você estivesse apto a pegar a curva e colocá-la em direção ao eixo negativo de *x*.

3. A quantidade movida é equivalente a uma *mudança de fase*. Isso é diferente da fase. O modo como nós estamos usando o termo aqui, é que a mudança de fase faz com que a onda do seno se mova sobre uma certa "distância" (realmente, um intervalo de tempo) ao longo do eixo *t*, onde a fase é um ângulo. A mudança de fase é dada por α/ω. Quando a freqüência angular é única, como nesse caso, a fase e a mudança de fase são numericamente a mesma. Se $\omega \neq 1$, a mudana de fase deve ser calculada. Neste exemplo, a mudança de fase é 0.3 segundos, onde a fase é 0.3 radianos.

4. Nós definimos as duas expressões dando a elas os nomes f1 e f2. Deste modo, nós podemos usá-las no comando plot. Maple substitui esses nomes com seus valores e plota o resultado. Os valores são as duas senóides. Observe que a sintaxe Maple usa suportes ondulados para plotar um *conjunto* de funções (dois nesse caso).

Exemplos e Solução de Problemas

Exemplo 5 – 6

Duas senóides ambas com amplitudes de 10 unidades. Uma tem freqüência angular de $2s^{-1}$ e a outra tem freqüência angular de $10s^{-1}$. Construa ambas no mesmo gráfico para uma oscilação completa da onda mais tardia. Ambas as senóides têm uma fase de zero.

Solução: Você não precisa definir as duas funções; pode escrever as fórmulas diretamente no comando *plot*. A onda tardia tem freqüência angular de 2; então a extensão deve ser *t* = 0 .. Pi.

> plot({ 10*sin(2*t), 10*sin(10*t) }, t = 0 .. Pi);

Veja a Figura 5.10. Observe que a onda mais rápida, cuja freqüência angular é cinco vezes a da onda mais lenta, tem cinco picos na mesma região onde a onda lenta tem um.

Sua vez. Senóide *A* é dada por:

> A := 3*sin(4*t + Pi/10);

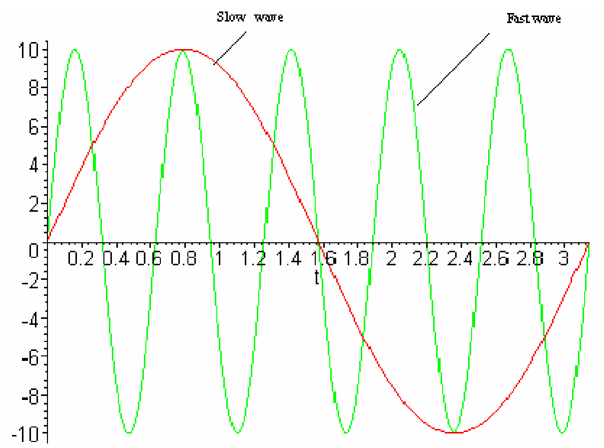

Figura 5.10 Duas Senóides de Mesma Amplitude mas de Freqüências Diferentes

E senóide B por:

> B := 4*sin(3*t-Pi/10);

(a) Construa ambas as senóides no mesmo gráfico para t = 0 .. Pi. Encontre a mudança de fase (em segundos) entre as duas ondas (o menor tempo entre A atravessando o eixo de t e B atravessando o eixo de t).

Resposta: ____

(b) As senóides começam na origem (0, 0)?

Resposta: ____

Exemplo 5 – 7

Adicione as ondas $f_1(t)$ = 3*sen(t) e $f_2(t)$ = 4*sen(t + 0.25). Escolha um intervalo gráfico para que uma onda completa de $f_1(t)$ e uma de $f_2(t)$ seja demostrada. O que você conclui sobre a forma da onda resultante?

Solução. Construa ambas as ondas e sua soma no mesmo gráfico (veja Figura 5.11). Adicione a mudança de fase de $f_2(t)$ no início do intervalo para que uma oscilação completa de ambas as ondas seja demostrada.

> plot({ 3*sin(t), 4*sin(t + 0.25), 3*sin(t) + 4*sin(t +0.25) }, t = -0.25 ..2*Pi);

A soma das duas ondas seno parece como uma onda seno, também. Isso não é tão óbvio como realizar essa soma algebricamente, mas a evidência experimental do gráfico é bastante convincente. Você verá uma derivação no Capítulo 8.

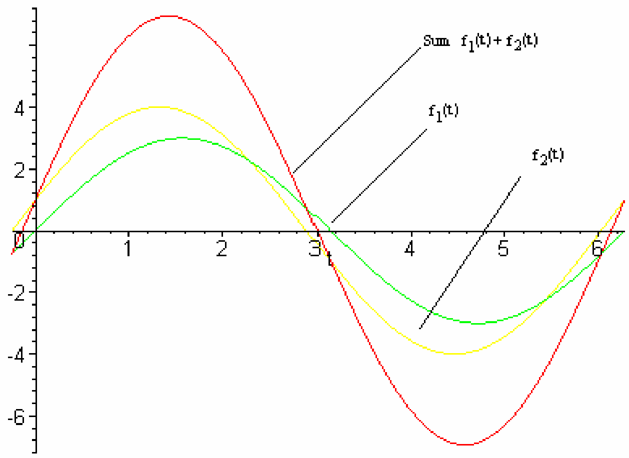

Figura 5.11 A Soma das Duas Senóides

Sua Vez. Adicione denóides *A* e *B* onde:

> A := 5*sin(10*t);

e:

> B := 4*sin(10*t + Pi);

Demostre *A*, *B* e *A* + *B* no mesmo gráfico, sobre o intervalo $t = 0$ .. Pi/5.

(a) Compare a soma das sinusóides fazendo a soma:

Resposta: ____

(b) *A* + *B* é maior ou menor que *A*; e que *B*?

*Resposta :*____

Exemplo 5 – 8: Cofunção Relação de Sen(θ) e Cos(θ)

Construa sen(θ), cos(θ) e sen(θ + π/2) no mesmo gráfico. O que você pode concluir sobre a relação entre sen(θ + π/2) e cos(θ)?

Solução: (Veja também Figura 5.12):

> plot({ sin(theta),cos(theta),sin(theta + Pi/2) }, theta = 0 .. 2*Pi);

As duas curvas, cos(θ) e sen(θ + π/2), têm o mesmo gráfico. O único modo de dizer que sen(θ + π/2) realmente existe é construí-lo por si mesmo. Faça isso para provar que ele realmente tem o mesmo gráfico que cos(θ). Você irá ter que mostrar outras relações desse tipo nos exercícios Maple dessa seção.

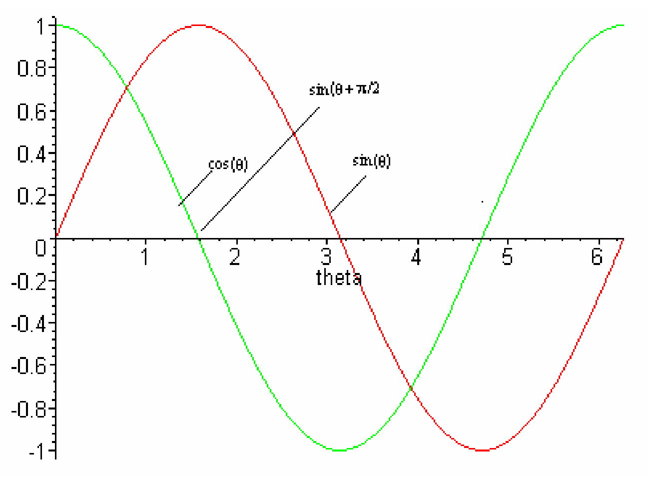

Figura 5.12 Gráfico de sen(θ), cos(θ) e sen(θ + π/2)

Lápis e Papel

LP – 1

Converta as seguintes revoluções para graus.

(a) 21 ½ rotações = ____________ graus
(b) 66 2/3 rotações = ____________ graus
(c) 2π rotações = ____________ graus

LP – 2

Converta os seguintes ângulos para rotações. Afirme sua resposta em rotações completas e o resto em graus.

(a) 3,600 graus = ____________rotações
(b) 1,450 graus = ____________rotações
(c) 1,890 graus = ____________rotações
(d) 4,000 graus = ____________rotações
(e) 4,000 graus = ____________rotações

LP – 3

Converta as seguintes rotações para radianos. Dê a resposta *exata*.

(a) 60 rotações = ____________radianos

(b) 2π rotações = ____________radianos

(c) $\pi/2$ rotações = ____________radianos

LP – 4

(a) 20π radianos = ____________rotações

(b) 23 radianos = ____________rotações

(c) 99 radianos = ____________rotações

LP – 5

(a) 720º = ____________rotações

(b) 36,000 radianos = ____________rotações

(c) 1080º = ____________rotações

(d) 40π radianos = ____________rotações

(e) 7 radianos = ____________rotações

(f) 62,800 radianos = ____________rotações

LP – 6

Subtraindo a rotação completa, afirme o ângulo menor que 360º (ou 2π radianos) para o qual esses ângulos são equivalentes. Em outras palavras, afirme o ângulo de referência:

(a) 420º = ____________graus

(b) 3π radianos = ____________graus

(c) 1,333º = ____________graus

(d) 855º = ____________graus

(e) 9.87 radianos = ____________graus

(f) 1,333 radianos = ____________graus

LP – 7

Você pode querer usar o Maple para checar isso: quantos graus a terra gira ao longe de um ano? Quantos radianos ela gira? Primeiro, afirme o problema mais precisamente. Existem no mínimo duas interpretações possíveis:

Interpretações do problema: ____

Resposta: A terra gira ___________graus ou ___________________ radianos.

LP – 8

No papel, construa o triângulo de referência para cos(θ) = 0.1. Meça o triângulo com um transferidor:

Resposta: Ângulo em graus _________________ Ângulo em radianos________________

Laboratório Maple

LM – 1 : Cofunção Relações

Demostre essas relações de cofunções, construindo o gráfico das funções no Maple.

(a) sen(x) = cos(90º -x) (b) cos(x) = sen(90º -x) (c) tan(x) = cot(90º -x)

(b) cot(x) = tan(90º -x) (e) sec(x) = csc(90º -x) (f) csc(x) = sec(90º -x)

Examinando os gráficos das duas funções, determine as relações entre:

(a) sen(x) e cos(90º +x) *Resposta:*__________________

(b) cos(x) e sen(90º +x) *Resposta:*__________________

(c) sen(x) e sen(180º +x) *Resposta:*__________________

LM – 2

Adicionar duas senóides de freqüências diferentes dá um resultado muito diferente do Exemplo 5 – 7, onde ambas as senóides têm a mesma freqüência. Construa o gráfico da expressão 3 sen(2x) e 2cos(3x). O gráfico de 3 sen(2x) + 2cos(3x) é uma senóide? Descreva a forma da onda resultante:

*Resposta:*____

LM –3 : Valores Funcionais

Você irá precisar avaliar "funções de funções" em trigonometria, e você precisará fazer alguns cálculos. Esses cálculos são simplificados usando a notação funcional.

Defina as funções

> f := theta -> 1 + sin(2*theta);

$$f: = \theta \to 1 \ + \ \sin(2\theta)$$

> g := theta -> 2 * cot(Pi/4 * (theta-1));

$$g := \theta \to 2 \ \cot\left(\frac{1}{4}\pi(\theta - 1)\right)$$

(a) Nós temos usado o nome θ em ambas as definições. Existe um conflito de nomes aqui? (A resposta é não) No Maple, dê uma olhada nos comandos relacionados e responda às questões.

(i) Evaluate > f(2*Pi); *Resposta:*__________________

(ii) Evaluate > g(2); *Resposta:*__________________

(iii) Evaluate > f(*x*); *Resposta:*__________________

A vantagem dessa notação é a facilidade com que você pode avaliar as funções em vários pontos.

(b) Avalie:

(i) > f(Pi/3); *Resposta:*__________________

(ii) > g(3); *Resposta:*__________________

Verifique as respostas do Maple avaliando essas funções com a sua calculadora. Uma vez que você tenha digitado os comandos para *f*(θ) e *g*(θ), é muito fácil substituir θ por qualquer valor que você escolher. Você pode obter os novos resultados com uma simples operação de edição.

(c) Avalie g(1), Explique os resultados do Maple:

Resposta: ____

(d) Aqui você irá avaliar uma "função de uma função". Digite o comando.

> g (f (Pi/12));

e explique o resultado. Primeiro, a função, *f*, é avaliada em $\theta = \pi/12$. Chame o resultado *x*. A função g(*x*) é avaliada para obter o resultado final.

*Resposta:*____

(e) Observe estes comandos:

(i) f(Pi/4);	*Resposta:*_________________
(ii) *g*(*f*(Pi/4));	*Resposta:*_________________
(iii) *g*(g(*f*(Pi/4)));	*Resposta:*_________________
(iv) *g*(g(g(*f*(*Pi*/4))));	*Resposta:*_________________

Explique esses resultados:

*Resposta:*____

(f) Avalie e interprete seus resultados:

> f (1.377336877);

*Resposta:*____

*Explicação:*____

(g) Tente outras combinações de *f* e *g*. Escreva alguns dos seus resultados mais interessantes. Por exemplo, compare o resultado que você conseguiu de $f(g(3))$ e $g(f(3))$.

*Resposta:*____

*Outro Exemplo:*____

LM – 4: Solução de um Triângulo Reto

Encontre o ângulo e as extensões AD e AC (veja Figura 5.13).

>; (Escreva os comandos Maple que resolvem esse problema aqui) ____________________

Respostas: ____

CB = ____

θ = ____

AD = ____

AC = ____

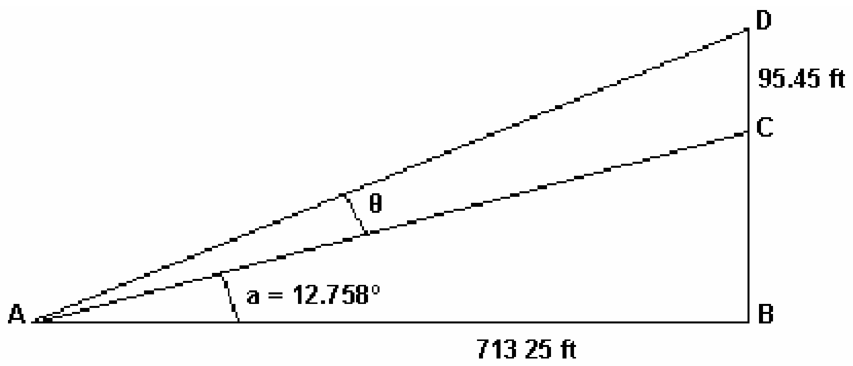

Figura 5.13 Diagrama para ML5 - 4

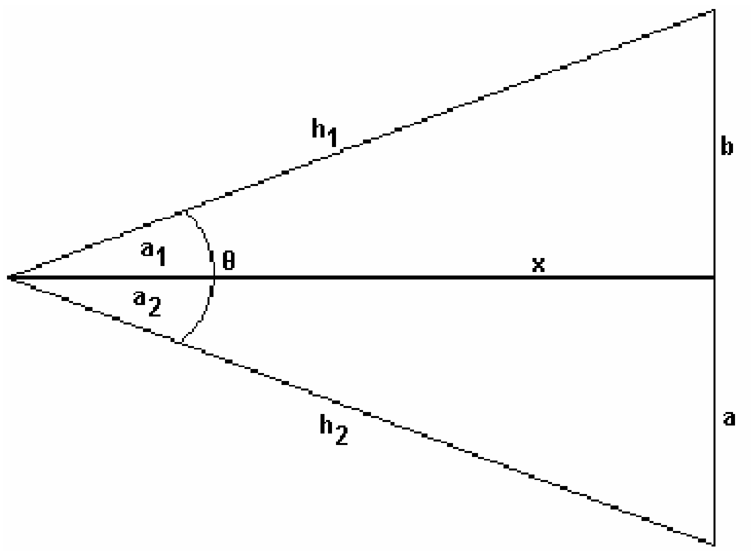

Figura 5.14 Diagrama para ML5 - 5

LM – 5: Solução de um Triângulo Reto

Dado x = 10.11 m, a = 3,47 m, e b = 4.23 m, encontre θ, h_1, e h_2 (veja Figura 5.14).

>; (Escreva aqui os comandos Maple que solucionam esse problema)__________________

Respostas: y = ____

α_1 = ____

α_2 = ____

θ = ____

h_1 = ____

h_2 = ____

Explorações

E5-1

No exemplo 5 – 7 você encontra a soma das ondas seno. Você pesquisou esse tipo de soma no ML5 – 2, onde as duas ondas seno têm freqüências diferentes.

Explore o que acontece quando duas ondas seno são multiplicadas juntas. Descreva o resultado de:

(a) Multiplicando uma onda seno por ela mesma:

> a := sin(x)*sin(x);

(b) Multiplicando uma onda seno por uma onda coseno:

> b := sin(x)*cos(x);

(c) Multiplicando uma onda seno por outra de freqüência maior:

> c := sin(x)*sin(10*x);

Você pode querer começar suas explorações definindo as funções que você usará e então construir gráficos. Veja se você pode predizer a forma de uma curva antes de construí-la. Mude o ângulo variável de θ para 2θ e então para 3θ. Veja se isso faz uma diferença essencial no gráfico, vez de perder tempo completando oscilações.

Registre a sua pesquisa e os seus gráficos. Você irá retornar as formas (a) e (b) posteriormente neste texto. A forma (c) é chamada *modulação de amplitude*.